Applications des formules d'Euler : méthode de l'arc moitié

Pré requis : pour tout réel θ, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Astuces : pour tout réel θ, $\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = e^{i\theta}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}} = 1$.

Proposition :

Pour tout réel θ, $e^{i\theta}+1 = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\theta}-1 = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Preuve :

Pour tout réel θ, on a :

$$e^{i\theta}+1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

et $$e^{i\theta}-1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Pour s'exercer :

1. A l'aide des formules d'Euler, exprimer $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
2. Vérifier que : $e^{i\alpha}-e^{i\beta} = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

Solution :

1. On a : $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{2i}$.
2. $$e^{i\alpha}-e^{i\beta} = \left(e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) - \left(e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.e^{i\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)}\right) = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)}\right)$$
$$= e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Ainsi $e^{i\alpha}-e^{i\beta} = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$